MATEMATIKA OLIMPIA
KÖRZETI SZAKASZ
2013. január 26.
IX. OSZTÁLY
(4 órás program)

1.) **a)** Bizonyítsa be, hogy ha $a,b,c \in \mathbb{R}$ és $a+b+c=1$, akkor $(1-a)(1-b)(1-c)+abc \le \frac{1}{3}$

b) Határozza meg az $M=\left\{x \in Z \middle| \sqrt{x^2+2013} \in Z\right\}$ halmazt.

2.) Oldja meg a következő egyenletet: [x+{x}] = [x+[x]], x$\in \mathbb{R}$, ahol $[x],\{x\}$ az x valós szám egészrészét, illetve törtrészét jelöli.

3.) Tekintsük a $\vec{w}_n = a_n\vec{i} + a`_n\vec{j}, n \in N^*$ vektorokat.

a) Ha $(a_n)_{n\ge1}$ és $(a`_n)_{n\ge1}$ nem állandó számtani haladványok, állandó különbségük $r$ illetve $r`$, mi a feltétele annak, hogy a $\vec{w}_n, n \in N^*$ vektorok között legyenek egymástól különböző kollineáris vektorok is? Ebben az esetben melyek a kollineáris vektorok?

b) Ugyanazok a kérdések az $(a_n)_{n\ge1}$ és $(a`_n)_{n\ge1}$ mértani haladványok esetén, melyek állandó hányadosai $q$ illetve $q`$.

4.) Az ABC háromszög AB és AC oldalán felvesszük az M és N pontot úgy, hogy $\frac{MA}{MB}=k,\ \frac{NA}{NC}=l,\ k,l \in Q_+^*,\ k<l$. Legyen $\{P\}=MN \cap BC$. Határozza meg l azon értékét k függvényében, amelyre az AMN és CNP háromszögek területe egyenlő!

Megjegyzés:

Minden feladat kötelező.

Minden feladat 10 pontot ér.

Munkaidő 3 óra.